24 Février 2025 *Benjamin Vincent*

Corrigé 1

Exercice 1 : Calculs avec l'opérateur $\vec{\nabla}$

Soit $f(\vec{r},t)$ un champ scalaire et $\vec{u}(\vec{r},t)$ un champ vectoriel, dépéndant tous deux du temps t et de la position $\vec{r}$. Vérifier la validité des relations suivantes et indiquer si chacun des membres est un champs scalaire ou vectoriel.

(a) $\vec{\nabla}\cdot(f\vec{u}) \stackrel{?}{=} \vec{u}\cdot\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$

(b) $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})f \stackrel{?}{=} (\vec{\nabla}\cdot\vec{u})f$

(c) $\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{u}$

(d) $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \stackrel{?}{=} \vec{u}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{u})$

Indication : Calculer ces expressions en coordonnées cartésiennes.

Solution :

(a) En coordonnées cartésiennes, on trouve pour

— Le membre gauche :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot(f\vec{u}) &= \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\cdot\left(f\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}fu_x\\ fu_y\\ fu_z\end{pmatrix}\\ &= \partial_x(fu_x)+\partial_y(fu_y)+\partial_z(fu_z)\end{aligned}$$

Ce terme est un champ scalaire.

— Le membre de droite :

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}\cdot\vec{u} &= \begin{pmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\\ \partial_z f\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix}\\ &= u_x\partial_x f + u_y\partial_y f + u_z\partial_z f + f\partial_x u_x + f\partial_y u_y + f\partial_z u_z\\ &= \partial_x(fu_x)+\partial_y(fu_y)+\partial_z(fu_z)\end{aligned}$$

Ce terme est un champ scalaire identique au membre de gauche.

$\Rightarrow$ La relation (a) est donc vérifiée.

(b) En coordonnées cartésiennes, on trouve pour

— Le membre de gauche :

$$\begin{aligned}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})f &= \left(\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\right)f\\ &= (u_x\partial_x + u_y\partial_y + u_z\partial_z)f\\ &= u_x\partial_x f + u_y\partial_y f + u_z\partial_z f\end{aligned}$$

Ce terme est un champ scalaire.

— Le membre de droite :

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})f &= \left(\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix}\right) f\\ &= (\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z) f\end{aligned}$$

Ce terme est aussi un champ scalaire, mais différent du membre de gauche.

$\Rightarrow$ La relation (b) n'est donc pas correcte.

(c) En coordonnées cartésiennes, on trouve pour

— Le membre de gauche :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} &= \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\partial_t u_x\\ \partial_t u_y\\ \partial_t u_z\end{pmatrix}\\ &= \partial_x\partial_t u_x + \partial_y\partial_t u_y + \partial_z\partial_t u_z\end{aligned}$$

Ce terme est un champ scalaire.

— Le membre de droite :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{u} &= \frac{\partial}{\partial t}(\partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z)\\ &= \partial_t\partial_x u_x + \partial_t\partial_y u_y + \partial_t\partial_z u_z\end{aligned}$$

Ce terme aussi un scalaire.

$\Rightarrow$ Puisque les dérivées partielles sont commutatives (par exemple $\partial_x\partial_t u_x = \partial_t\partial_x u_x$), la relation (c) est valable.

(d) En coordonnées cartésiennes, on trouve pour

— Le membre de gauche :

$$\begin{aligned}(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} &= \left(\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix}\\ &= (u_x\partial_x + u_y\partial_y + u_z\partial_z)\begin{pmatrix}u_x\\ u_y\\ u_z\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}u_x\partial_x u_x + u_y\partial_y u_x + u_z\partial_z u_x\\ u_x\partial_x u_y + u_y\partial_y u_y + u_z\partial_z u_y\\ u_x\partial_x u_z + u_y\partial_y u_z + u_z\partial_z u_z\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ce terme est un champ vectoriel.

— Le membre de droite est le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{\nabla}\times\vec{u}$, qui est forcément un champ scalaire.

$\Rightarrow$ Comme le membre de gauche est un champ vectoriel et le membre de droite est un scalaire, la relation (d) ne peut pas être valable.

Exercice 2 : Gradient en coordonnées cartésiennes et sphériques

Dans le cours, nous avons défini $\vec{\nabla} f$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ et $\vec{\nabla} \times \vec{u}$ en coordonnées cartésiennes, mais ces opérateurs sont indépendants du système de coordonnées. On va illustrer ceci avec un exemple. On considère la fonction suivante :

$$f(\vec{r}) = \exp\left(-\frac{|\vec{r}|}{\lambda}\right)$$

(a) Calculer $\vec{\nabla} f$ en repérant $\vec{r}$ avec un système de coordonnées cartésiennes.

(b) Calculer $\vec{\nabla} f$ en repérant $\vec{r}$ avec un système coordonnées sphériques. Utiliser le formulaire.

Solution :

(a) En considérant un des coordonnées cartésiennes $(x,\ y,\ z)$, on a $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. On peut donc écrire :

$$f(x,y,z) = \exp\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\lambda}\right)$$

Avec ce système de coordonnées, on a :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f =& \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\exp\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\lambda}\right)\right) + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\exp\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\lambda}\right)\right) \\
&+ \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\exp\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\lambda}\right)\right) \\
=& \vec{e}_x \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\lambda}\right) \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&+ \vec{e}_y \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\lambda}\right) \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&+ \vec{e}_z \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\lambda}\right) \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
=& -\frac{x}{\lambda|\vec{r}|} \exp\left(-\frac{|\vec{r}|}{\lambda}\right) \vec{e}_x - \frac{y}{\lambda|\vec{r}|} \exp\left(-\frac{|\vec{r}|}{\lambda}\right) \vec{e}_y - \frac{z}{\lambda|\vec{r}|} \exp\left(-\frac{|\vec{r}|}{\lambda}\right) \vec{e}_z \\
=& -\frac{\vec{r}}{\lambda|\vec{r}|} \exp\left(-\frac{|\vec{r}|}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

(b) Supposons maintenant des coordonnées sphériques $(r,\ \theta,\ \varphi)$, tel que $r = |\vec{r}|$. On peut alors écrire :

$$f(r,\theta,\varphi) = \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)$$

Avec ce système de coordonnées, on a :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} f &= \vec{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \\
&= \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\left(\exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)\right) + \vec{0} + \vec{0} \\
&= -\frac{\vec{e}_r}{\lambda} \exp\left(-\frac{r}{\lambda}\right)
\end{aligned}$$

Sachant que $\vec{e}_r = \vec{r}/r$, on retrouve bien le résultat obtenu avec l'opérateur gradient exprimé avec un système des cartésiennes.

Exercice 3 : Plus d'exemples en coordonnées sphériques

Pour un vecteur position $\vec{r}$, on définit la fonction suivante : $f(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|}$. En utilisant un système de coordonnées sphériques répondre aux questions suivantes :

(a) Calculer $\vec{\nabla} f = \vec{F}$.

(b) Que vaut $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$?

(c) Que vaut $\vec{\nabla} \times \vec{F}$? Pourriez-vous deviner le résultat ?

Indication : utiliser le formulaire du cours.

Solution :

(a) Si on considère un système de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) tel que $r = |\vec{r}|$, on a alors $f(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r}$. A l'aide du formulaire du cours, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi} \\ &= -\frac{1}{r^2}\vec{e_r}\end{aligned}$$

D'où $\vec{F} = -\vec{e}_r/r^2$.

(b) De même, avec $\vec{F} = F_r\vec{e}_r + F_\theta\vec{e}_\theta + F_\varphi\vec{e}_\varphi$ on a :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(F_\theta \sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{-r^2}{r^2}) \\ &= 0\end{aligned}$$

(c) En prenant l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques, on a :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(F_\varphi \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rF_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

On pouvait deviner le résultat car pour toute fonction f, on a $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$ (une relation qui est facile a démontrer en coordonnés cartésiennes).

Exercice 4 : Calcul de flux

On considère un tuyau rectangulaire de section S et d'axe selon $\vec{e}_z$. Un liquide, de densité volumique ρ_0 constante, coule dans le tuyau à une vitesse fluide constante $\vec{u}_0 = u_0\vec{e}_z$.

(a) Quel est le flux de masse à travers la section du tuyau (on considère la section S perpendiculaire à l'axe $\vec{e}_z$) ?

(b) A présent, on considère une surface S', identique à S, mais qui n'est pas perpendiculaire à $\vec{e}_z$. Comment écrivez-vous le flux de masse à travers S' ? Ce flux est-il égal à celui calculé précédemment ?

Rappel : Le flux d'une quantité A à travers une surface S est définit comme la quantité de A qui traverse S par unité de temps.

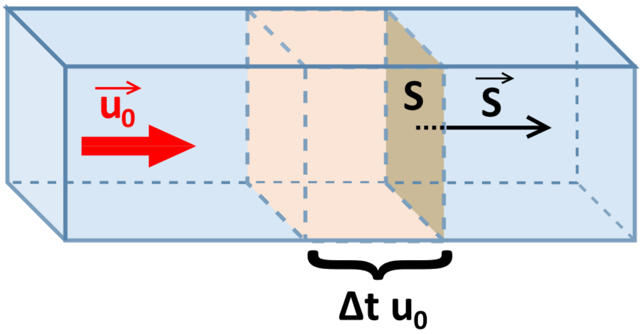
Remarque : on ne veut pas utiliser la relation $\phi = \iint_{S'} d\phi = \iint_{S'} \rho\vec{u}_0 \cdot d\vec{S'}$ vue dans le cours. Le but de cet exercice est de la dériver.

Solution :

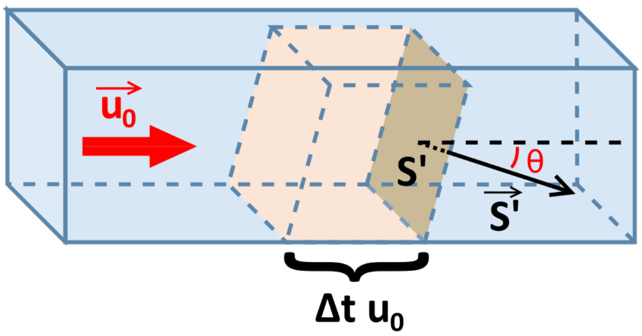
(a) Dans ce premier cas, on a $\vec{u}_0 = u_0\vec{e}_z$ perpendiculaire à S. De plus le fluide étant incompréssible, sa densité volumique ρ est constante et donc $\rho = \rho_0$.
Le volume du fluide qui traverse la surface S dans un temps Δt est un pavé droit de section S et de longueur $\Delta t \cdot u_0$ (voir figure). Ce volume contient une masse $\Delta m = \rho_0 \Delta V = \rho_0 S u_0 \Delta t$. On trouve donc que le flux de masse ϕ à travers la surface S est donné par :

$$\phi = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho_0 u_0 S$$

Remarque : Quelle est la dimension de ϕ ?
$[\phi] = m^2 \frac{kg}{m^3} \frac{m}{s} = \frac{kg}{s}$, c'est à dire la quantité de masse qui traverse la surface S par seconde.
Souvent, on parle aussi de flux volumétrique $\phi_v = Surface \cdot u_0$ avec $[\phi_v] = m^2 \frac{m}{s} = \frac{m^3}{s}$, soit un volume qui traverse la surface S par seconde.



(b) Cette fois-ci, la vitesse n'est pas perpendiculaire à la surface. On définit l'angle θ, qui est l'angle entre $\vec{u}_0$ et le vecteur surface $\vec{S'}$ (comme indiquée dans la 2ème figure).



Dans ce cas, le volume $\Delta V'$ du fluide qui traverse la surface S' dans un temps Δt est celui d'un parallélépipède. En prenant en compte l'inclinaison des faces d'entrée et de sortie, on obtient $\Delta V' = \Delta t \cdot u_0 \cdot S' \cos(\theta)$. On trouve donc le flux de masse ϕ à travers la surface S' :

$$\phi = \rho_0 u_0 S' \cos(\theta)$$

Et comme les surfaces S' et S sont les mêmes, $S = S'$, on a :

$$\phi = \rho_0 u_0 S cos(\theta)$$

Le flux est donc plus petit que dans le point (a) dans le cas où $\theta \neq 0$. Notez que l'avant-dernière expression peut aussi être écrite comme $\phi = \rho_0 \vec{u}_0 \cdot \vec{S'}$. Si la vitesse $\vec{u}_0$ n'est pas constante dans l'espace et/ou si la surface S' n'est pas plane, ce résultat reste valable si l'on considère un élément infinitésimal de surface : $d\phi = \rho_0 \vec{u}_0 \cdot d\vec{S'}$ et $\phi = \iint_{S'} d\phi = \iint_{S'} \rho \vec{u}_0 \cdot d\vec{S'}$. On appelle $\rho \vec{u}_0$ la densité de flux de masse.